Paradacsaí

GEARÓID Ó CATHÁIN

Achoimre. Is féidir le paradacsaí deacrachtaí a léiriú go gonta nuair a chuirtear na míreanna d'argóint (tosach, réasúnaíocht, críoch) le chéile, go háirithe nuair a ritheann an chonclúid i gcoinne ár n-iomas. Ní bhíonn réiteach éasca ann i gcónaí. Bhí áit lárnach ag paradacsaí i stair na matamaitice nuair a tugadh aghaidh ar bhunchloch an ábhair – go háirithe trí réasúnaíocht loighce. Tá roinnt de na paradacsaí tógtha isteach anois sa chóras matamaiticiúil; uaireanta tríd an bparadacsa a réiteach agus uaireanta eile tríd an bparadacsa a sheachaint. Bhí deacrachtaí faoi leith leis an éigríoch agus féintagairt. Pléifear réimse leathan de pharadacsaí san alt seo.

1. Éagsúlachtaí de Pharadacsaí

Tagann an focal paradacsa ón nGréigis le ciall 'thar (*para*) chreidiúint (*doxa*)'. Is minic a úsáidtear an téarma nuair a bhíonn sórt ionaidh orainn faoin gconclúid i ndiaidh argóinte réasúnta. Cloímid, go ginearálta, le téarmaíocht W. V. Quine [1]. Dar leis, tá trí saghas:

- veridical
- falsidical
- antinomy

Veridical
Uaireanta, ní bhíonn ach cuma pharadacsúil ann, mar nuair a mhínítear dúinn cad atá cearr, leanann réiteach iomlán ar an scéal. Mar shampla, tosaíonn Quine [1] a chuntas ar pharadacsaí le tagairt don cheoldráma 'Pirates of Penzance' ina ndeirtear 'Is paradacsa é. Is paradacsa é'. Táthar ag rá faoi Frederic, a bhfuil bliain is fiche d'aois ach nach raibh ach *cúig* lá breithe aige. Réitítear an scéal ina iomláine nuair a mhínítear dúinn go bhfuil rud annamh ag tarlú anseo; rud nach dtarlaíonn ach uair amháin i ngach 1,460 lá – rugadh

é ar an 29 Feabhra! Níl aon bhréagadóireacht ag baint le paradacsa mar seo agus nuair a thuigimid an casadh sa scéal, imíonn an t-iontas a bhí ann go tapa.

Falsidical

Sa chás thuas, níl aon locht san argóint. San argóint seo, ó Augustus de Morgan (1806–1871) tá coimhlint ann.

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
x^2 &= x \\
x^2 - 1 &= x - 1 \\
(x+1)(x-1) &= x - 1 \\
x + 1 &= 1 \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

Is léir nach bhfuil anseo ach briseadh rialach (roinnt faoi náid) agus is minic a úsáidtear an téarma 'fallás' ina leith siúd. Úsáideann Quine 'falsidical' nuair a bhíonn bréagadóireacht sa réasúnaíocht agus sa chonclúid. Go ginearálta tá an córas matamaitice bunaithe ar rialacha agus ní féidir glacadh le frithrá mar loiteann sé an córas uile – féach Fíor 1 le tábla fírinne Wittgenstein. Tá go leor falláis mhatamaitice ann – beagnach ceann i leith gach riail. Is áiseanna foghlamtha iad chun a léiriú chomh seafóideach is a bhíonn cúrsaí nuair a bhristear na rialacha. Ach, ar an taobh eile de, léiríonn siad go bunúsach an fáth go bhfuil na rialacha ann. Is foinse dheas é Northrop [2] d'fhalláis.

Antinomy

An tríú sórt paradacsa a luaitear go minic ná 'antinomy' (*anti*–i

1.	p&¬p	tugtha, an frithrá
2.	p	ó 1.
3.	¬p	ó 1.
4.	p∨q	ó 2. p fíor, cuma faoi q
5.	q	ó 3. p bréagach, caithfidh q fíor

.i. Tá q fíor, ach is ráiteas ar bith é q.

p	q	¬p	p&q	p∨q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

FÍOR 1. Leanann gach rud ó Fhrithrá – Loighic Chlasaiceach

gcoinne an dlí–*nomy*) – atá níos doimhne ná na cinn eile. Bíonn bunrudaí i gceist agus is minic go n-athraímid ár meon faoi mhír éigin san argóint (tosach, réasúnaíocht nó críoch). Is léir ó chárta gnó an mhatamaiticeora Shasanaigh P. E. B. Jourdain(1913) [3, Caibidil 1] cén sórt deacracht atá againn (Fíor 2). Tá an dá thaobh in éadan a chéile – mar mhadra sa tóir ar a eireaball féin agus ní féidir leis an dá ráiteas bheith fíor ag an am céanna.

Tá an abairt ar an taobh thall den chárta seo fíor.	Tá an abairt ar an taobh thall den chárta seo bréagach.

FÍOR 2. Cárta gnó Jourdain

2. STAITISTIC

Glactar go forleathan le haicsímí Kolmogorov mar bhunchloch na matamaitice i leith dóchúlachta. Ach níl aontas i measc na staitisteoirí maidir leis an léirmhíniú ar dhóchúlacht. Dar le dream amháin is minicíocht choibhneasta fadtéarmach atá i gceist. Dar le dream eile is tomhas suibiachtúil atá ann a leasaítear trí Theoirim Bayes nuair a thagann breis eolais chun solais.

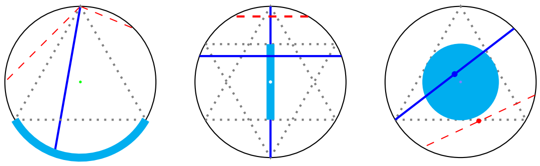
Braitheann an sainmhíniú clasaiceach ar dhóchúlacht,

$$p \equiv \frac{\#\,\text{torthaí fabhracha}}{\#\,\text{torthaí féideartha}}, \quad \left[\text{m.sh.}\ \Pr[\clubsuit] = \tfrac{13}{52}\right],$$

ar an seans céanna a bheith ag gach rogha. Ní sainmhíniú i ndáiríre í seo mar tá an coincheap céanna sa mhíniú is atá sa choincheap atá á mhíniú. Úsáidtear Prionsabal Neafaise (Laplace) anseo. Sé sin, gan eolas roimh ré, níl aon chúis go dtoghfaí rogha áirithe thar cheann eile.

Pléimis le trí mhír

- *Paradacsa Bertrand*, a chuir ionadh ar na staitisteoirí ag an am,
- *Prionsabal Neafaise* a thugann casadh eile suimiúil ar an bprionsabal seo, agus
- *Paradacsa Simpson*, a thugann tacaíocht d'fhocail cháiliúla 'Lies, damn lies and statistics', a chuirtear i leith Benjamin Disraeli (1804–1881) uaireanta.



I: $p = \frac{1}{3}$ II: $p = \frac{1}{2}$ II: $p = \frac{1}{4}$

Trí mhodh chun corda le fad áirithe a phiocadh le dóchúlachtaí éagsúla. Tá na cordaí a théann trí achar scáthaithe fabhrach agus na cordaí eile ró gairid.

Fíor 3. Paradacsa Bertrand

Paradacsa Bertrand

Bhí an Francach Joseph Bertrand (1822–1900) ag plé, thart ar 1888, leis an dóchúlacht go bhfuil fad chorda, a phioctar gan aird i gciorcal, níos mó ná fad slios an triantáin chomhshleasaigh inmheánaigh.
Ag tagairt d'Fhíor 3:

Fíor 3 - I: *Pioc pointe ar an imlíne gan aird.* Tá fad gach corda ón bpointe go dtí an stua tiubh níos faide ná fad taobh an triantáin inmheánaigh. Is trian den imlíne é an stua tiubh: $p = \frac{1}{3}$.

Fíor 3 - II: *Pioc trastomhas gan aird* agus uaidh sin corda dronuillinneach leis. Tá gach corda a thrasnaíonn an trastomhas in áit tiubh níos faide ná fad taobh an triantáin. Leanann sé go bhfuil $p = \frac{1}{2}$.

Fíor 3 - III: *Pioc corda gan aird.* Má thiteann lárphointe an chorda sa chiorcal inmheánach, is corda fabhrach í. An cóimheas idir líon na bpointí sa chiorcal inmheánach (ga = leath ga an chiorcail mhóir) agus an ciorcal mór ná $\frac{\pi\, r^2}{\pi\,(2r)^2} = \frac{1}{4}$.

Tá trí fhreagra difriúil ann, agus níl aon locht sa réasúnaíocht. Braitheann an dóchúlacht ar an modh roghnaithe – ní raibh sé sin ar eolas go dtí gur léirigh Bertrand an paradacsa seo.

Prionsabal Neafaise

Tá meascán d'fhíon agus uisce i ngloine. An t-aon réamheolas atá againn ná go bhfuil ar a laghad an méid chéanna d'fhíon agus d'uisce

I - fíon : uisce	
réamheolas	1:1 − 1:2
luach airmheánach	$1{:}1\frac{1}{2}$
II - uisce : fíon	
réamheolas	$\frac{1}{2}{:}1 - 1{:}1$
luach airmheánach	$\frac{3}{4}{:}1$
inbhéarta go ***fíon : uisce***	$1{:}\frac{4}{3}$
$\neq$	$1{:}1\frac{1}{2}$

FÍOR 4. Prionsabal Neafaise

ann agus an t-uasmhéid ná go bhfuil dhá oiread d'uisce ann. Féach Fíor 4. De réir an Phrionsabail Neafaise, de dheasca aon eolais bhreise, tá an dóchúlacht chéanna ag gach meascán. I Modh I, tá dóchúlacht 50% ag baint leis an meascán bheith idir $1{:}1 - 1{:}1\frac{1}{2}$ agus sa raon $1{:}1\frac{1}{2} - 1{:}2$. Sé sin, is é $1{:}1\frac{1}{2}$ an luach airmheánach. Mar an gcéanna i Modh II(uisce:fíon) is é $\frac{3}{4}{:}1$ an luach airmheánach. Ach nuair a aistrítear go dtí an cóimheas fíon:uisce is ionann an luach sin agus $1{:}\frac{4}{3}$.

Níl an Prionsabal Neafaise ag teacht slán ar an dá mhodh roghnaithe.

Paradacsa Simpson

I ngach scoil san ollscoil tá ráta pas níos fearr ag na cailíní ach ar an iomlán tá ráta pas níos fearr ag na buachaillí. Cinnte tá cuma pharadacsúil ar an ráiteas sin. Féach Fíor 5.

Rinne 600 buachaill an scrúdú sa Stair ach theip ar 480 díobh ag tabhairt ráta pas de 80%. Ach d'éirigh le 90% de na cailíní sa scrúdú céanna. Arís, tá na cailíní (33%) níos fearr san Fhisic. Ar an iomlán áfach is a mhalairt atá fíor – tá na buachaillí níos fearr (70% v 56%). Tá an uimhríocht i gceart ach fós tá cuma pharadacsúil ag baint leis.

An fhadhb anseo ná, i gcomparáid leis na buachaillí, d'éirigh go maith le líon beag de chailíní i scrúdú éasca agus sa scrúdú deacair

	Pas	*Teip*	*Iomlán*	*Ráta Pas*
Stair				
Buachaillí	480	120	600	80%
Cailíní	180	20	200	90%
Fisic				
Buachaillí	10	90	100	10%
Cailíní	100	200	300	33%
Stair + Fisic				
Buachaillí	490	210	700	70%
Cailíní	280	220	500	56%

Fíor 5. Paradacsa Simpson

bhí líon na gcailíní i bhfad níos mó. Tá cóimheas de 3:1 (600:200) i bhfabhar na mbuachaillí sa scrúdú éasca agus an cóimheas de 3:1 (300:100) i bhfabhar na gcailíní sa scrúdú deacair.

Cosúil leis an bparadacsa i leith an Pirates of Penzance, tá rudaí neamhghnácha ag tarlú.

3. An Éigríoch

Tá áit faoi leith ag an éigríoch sa mhatamaitic. Pléimis le trí pharadacsa:

- *Zeno* a scríobh faoi chainníochtaí deimhneacha bídeacha beaga – an éigríoch ag dul i laghad, nó go neamhfhoirmiúil $\frac{1}{\infty}$.
- *Cantor* a thaispeáin go bhfuil níos mó ná saghas amháin d'éigríoch ann agus nach bhfuil aon éigríoch is mó ann.
- *Burali-Forti* a phléigh an ábhar céanna a bhí ag Cantor trí mhodh difriúil.

Paradacsa Zeno

Tá an-cháil ar Zeno (timpeall 300 RC) a bhí ag plé le rudaí gan teorainn. Bhí argóint bhunúsach aige agus an chríoch air ná nárbh fhéidir aon slí a thaisteal. Seo a leanas mar a léirigh sé.

Má theastaíonn uait an seomra a fhágáil caithfidh tú leath an tslí a shiúl i dtosach. Ansin caithfidh tú leath an tslí atá fágtha a shiúl, agus arís leath an tslí atá fós fágtha a shiúl. Agus mar sin de. Ar

Céim	Fad Céime	Fad Siúlta
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$\frac{1}{1{,}048{,}576}$	$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{20}} = 0.9999999046$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$	$\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i = 1 - (\frac{1}{2})^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

FÍOR 6. Paradacsa Zeno i nodaireacht an lae inniu

deireadh bíonn ort suim na bhfad uile sin a thaisteal. Dar le Zeno, ba chóir go mbeadh an suim sin d'fhaid gan teorainn – go háirithe mar nach bhfuil teorainn leis an méid faid atá le suimiú. I bhfocail eile, bheadh ort fad gan teorainn a thaisteal agus ní bheithfeá in ann an seomra a fhágáil.

Ba pharadacsa bunúsach é seo ag an am. Níorbh fhéidir glacadh leis an gconclúid agus ní raibh sé soiléir cá raibh an locht sa réasúnaíocht. Níor chuir sé isteach rómhór ar Aristotle [4, ltch 28] mar dar leis, bhí difear idir éigríoch trí shuimiú (sé sin má thógtar fad áirithe agus é a shuimiú leis féin go héigríoch – cinnte ní féidir an fad nua sin a shiúl) agus éigríoch trí dhéroinnt mar a dhein Zeno (mar go bhfuil an fad cuimsithe i dtosach).

Feictear dúinn i bhFíor 6 cad atá ag tarlú Is léir go bhfuil líon na gcéimeanna, n, ag dul i méid agus go bhfuil fad gach céime, $(\frac{1}{2})^n$, ag dul i laghad – níl ach an milliúnú chuid san fhichiú chéim. Is léir freisin go bhfuil an fad iomlán siúlta ag druidim cóngarach do a haon. Faraor, ní raibh an mhatamaitic seo ag na Gréagaigh.

Ba é Karl Weierstrass (1815–1897) a rinne an dul chun cinn maidir le luach feidhme, mar $(\frac{1}{2})^n$, nuair a ligtear n le héigríoch. Thug Weierstrass [5, ltch 161] sainmhíniú beacht ar an mbrí le luach $f(x)$ agus x ag druidim chun a; sé sin $\operatorname*{tr}_{x \to a} f(x) = L$ $(L \in \Re)$.

Dar leis, is cuma cé chomh cóngarach (abair $\pm\epsilon > 0$) go L a bhfuiltear, is féidir luach x atá cóngarach do a (abair $\pm\delta > 0$) a aimsiú sa chaoi is, go bhfuil $|f(x) - L| < \epsilon$. An cleas a bhí aige ná gan tagairt d'aon chainníocht nach réaduimhir é nó don éigríoch.

Sa chás seo tá $\underset{n\to\infty}{\mathrm{tr}}\, n = \infty$ agus $\underset{n\to\infty}{\mathrm{tr}} (\frac{1}{2})^n = 0$, ach tá $(\frac{1}{2})^n$ ag laghdú *níos tapúla* ná mar atá n ag dul i méid. Agus an teorainn le $S_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i$ ná 1.

Bhí fadhb, cosúil ar shlí, ag Grandi [6, ltch 118] i 1703. Bhí seisean ag plé leis an sraith

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \quad .$$

Ag brath ar conas a chuirimid na baill le chéile, faighimid freagraí difriúla, m.sh.

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$$

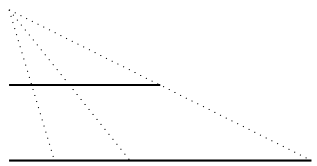
Cé go bhfuil cuma pharadacsúil anseo, d'aontódh matamaiticeoirí na linne seo le Grandi. Is sraith dibhéirseach í agus níl aon suim aige.

I dtéarmaí Quine [1] is paradacsa `falsidical` é paradacsa Zeno, mar (sa lá inniu) níl ann ach briseadh rialach faoi shraith atá coinbhéirseach, agus ní gá dúinn ár dtuiscint i leith na héigríche a leasú. Is dócha gur pharadacsa `antinomy` a bhí ann ag an am agus gur thóg sé breis is 2,000 bliain chun teacht ar réiteach sásúil. B'fhéidir go mbeidh réiteach sa todhchaí ar pharadacsaí na linne seo!

Paradacsa Cantor

De ghnáth bheithfeá ag súil go bhfuil an t-iomlán níos mó ná cuid. Tá sé sin fíor maidir le rudaí críochta. Ach bhí fios le fada nach mar sin a tharla maidir leis an éigríoch. Mar shampla, tá an líon céanna d'uimhreacha cearnacha $(1, 4, 9, 16, \ldots)$ agus uimhreacha aiceanta – ar a dtugtaí Paradacsa Galileo (1564–1642) uaireanta [6, ltch 5] – mar is féidir iad a chur le chéile aon-le-haon mar seo,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & \ldots \end{array} .$$



FÍOR 7. Tá an méid céanna de phointí i mírlínte éagsúla

Is soiléir leis, go bhfuil líon na bpointí i mírlíne amháin ar aon mhéid le líon na bpointí i mírlíne eile, mar is féidir ceangal aon-le-haon a dhéanamh eatarthu (Fíor 7).

Bé Georg Cantor (1845–1918) a rinne an dul chun cinn san ábhar seo. Thaispeáin sé go raibh éagsúlachtaí d'éigríoch ann; mar shampla go raibh an éigríoch de réaduimhreacha níos mó ná an éigríoch d'uimhreacha aiceanta.

An paradacsa ná nach bhfuil aon uilethacar ann! Thaispeáin sé go bhfuil bunuimhir an tacair chumhachtaigh (sé sin an tacair de na bhfo-thacar) níos mó i gcónaí ná bunuimhir an tacair féin. An chiall le 'níos mó' sa chomhthéacs seo ná nach féidir mapáil aon-le-haon a dhéanamh eatarthu. Tá sé seo soiléir i leith tacair críochta:

$X = \{1, 2, 3\}$, le bunuimhir $|X| = 3$, agus an tacar cumhachtach

$2^X = \{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$ le $|2^X| = 2^3$.

Bhain Cantor úsáid as argóint trasnánach chun a thaispeáint go raibh tacar cumhtachtach de na réaduimhreacha níos mó ná líon na huimhreacha aiceanta, ar ar thug sé $\aleph_0$. Rinne sé iarracht an dá thacar a mhapáil le chéile agus bhí breis baill sa tacar cumhtachtach.

Ag féachaint ar na huimhreacha aiceanta $1, 2, 3, \ldots$ rinne sé iarracht na fo-thacair go léir a liostáil – féach Fíor 8. Theip ar an iarracht sin.

Paradacsa Burali-Forti

Chonaiceamar thuas gur léirigh Cantor na bunuimhreacha i dtéarmaí aicmí coibhéiseacha faoi mhapáil dhétheilgeach. Mar an gcéanna, is féidir orduimhreacha a shainmhíniú mar aicmí coibhéiseacha de tacair dhea-ordaithe faoi mhapáil dhétheilgeach a choiméadann coibhéis

Liosta fo-thacar	*Na huimhreacha aiceanta* *1*	*2*	*3*	*4*	*5*	…
gach uimhir	✔	✔	✔	✔	✔	…
uimhir a trí	✗	✗	✔	✗	✗	…
corr uimhreacha	✔	✗	✔	✗	✔	…
cearnaithe	✔	✗	✗	✔	✗	…
ré-uimhreacha	✗	✔	✗	✔	✗	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…
fo-thacar trasnánach	✔	✗	✔	✔	✗	…
fo-thacar sa bhreis	✗	✔	✗	✗	✔	…

Tá liosta de na fo-thacair ar chlé agus iad innéacsaithe leis na huimhreacha aiceanta mar atá ar dheis. Nuair atá an liosta lán tóg an fo-thacar trasnánach agus bíodh fo-thacar nua againn trí athrú gach innéacs san fho-thacar trasnánach. Níl an fo-thacar nua ar an liosta mar tá éagsúlacht idir é agus an $n^ú$ fo-thacar ar an liosta san $n^ú$ innéacs. Leanann nach bhfuil an liosta de na fo-thacair uileghabhálach agus go bhfuil níos mó fo-thacair ann ná mar atá d'uimhreacha aiceanta

Fíor 8. Argóint Thrasnánach Cantor

san ord – is tacar dea-ordaithe $(A, \leq)$ más i leith gach fo-thacar de A, nach bhfuil folamh, go bhfuil íosbhall ann faoin ord sin.

Mar shampla, tá $A = \{1, 2, 3, 4\}$ faoi ord '$<$' agus $B = \{1, 4, 2, 3\}$ faoi ord na haibítre (aon, ceathair, dó, trí) coibhéiseach, san mhíniú seo, mar choiméadann an mhapáil seo an ord:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \updownarrow & & & \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}.$$

Is é an t-orduimhir ω den gnáth-ord atá ag dul leis na huimhreacha aiceanta, an t-orduimhir éigríche is lú.

Más orduimhir α, atá léirithe ag tacar dea-ordaithe $(A, \leq)$, agus má roghnaítear rud $t \notin A$, is féidir (de réir dealraimh) dea-ord a chur ar $A \cup \{t\}$ trí t a chur sa suíomh deiridh i ndiaidh le baill go léir de A; agus cuirtear an t-orduimhir comhfhreagrach, ar a dtugtaí an comharba, in iúl mar $\alpha + 1$. Ní comharba é gach orduimhir ach tá comharba ag gach orduimhir. Mar sin níl aon orduimhir is mó.

Ar an lámh eile, má thógaimid an bailiúchán de na tacair dhea-ordaithe go léir, tá ord páirteach so-fheicithe ag dul leis agus is soiléir go bhfuil uasluach ag gach fo-bhailiúchán dea-ordaithe. De réir Leama Zorn [7, Caibidil 7], tá uas-tacar dea-ordaithe ann arbh é a aicme Ω an t-orduimhir is mó.

Seo é an fhrithrá, ar lámh amháin tá $\Omega < \Omega + 1$ agus ar an lámh eile tá uasluach ann, .i.

$$\Omega < \Omega + 1 < \Omega.$$

De réir cosúlachta thuig Cantor é seo i 1895 ach d'fhoilsigh Burali-Forti é i 1897. Ba iad paradacsaí Cantor, Burali-Forti agus Russell (thíos) a chuir srian ar an gcoinceap saonta faoi thacair thart ar chasadh an chéid 1800 go 1900.

4. IONDUCHTÚ

Is minic a dhéantar idirdhealú idir réasúnaíocht déaduchtacht agus réasúnaíocht ionduchtach san eolaíocht. Níl mórán deacrachta le réasúnaíocht déaduchtach – sé sin an rud atá fíor i ngach uile chás, tá sé fíor i gcás faoi leith. I ndáiríre, tá an t-eolas ann cheana féin, agus nílimid ach á luaigh i gcás faoi leith, m.sh.

Neach básmhar is ea gach duine.
Duine is ea Sócraitéas.
Neach básmhar is ea Sócraitéas.

Ar shlí is disciplín déaduchtach í matamaitic mar, i ndiaidh roinnt bunphrionsabail a leagadh síos, leanann gach rud eile – cé gur léirigh Kurt Gödel nach féidir gach ráiteas sa mhatamaitic a aimsiú ó chóras aicsímiteach.

Ach tá an réasúnaíocht ionduchtach conspóideach ó am David Hume (1711–1776) i leith. Seo í an tslí ina bhfaightear breis eolais sna disciplíní fisiceacha – mar shampla, sa staitistic, nuair a leathnaíomar torthaí trí shuirbhé shamplach go pobal níos mó.

Úsáidtear ionduchtú matamaiticiúil mar mhodh cruthúnais, ach i ndáiríre is réasúnaíocht déaduchtach atá ann mar tá an t-eolas ann cheana féin.

Bhí scéal ag Bertrand Russell faoin turcaí a chreid sa mhodh ionduchtach. Bhí sé ag fáil béile ón bhfeirmeoir lá i ndiaidh lae agus ag tnúth le amárach go dtí am roimh Nollaig nuair a chas an feirmeoir muineál an turcaí! [8, ltch 164]

Chas Karl Popper (1902–1994) [9] an fhadhb bunoscionn. Dar leis, ní gá an bhéim a chur ar theoiric a dheimhniú. Déantar tuairimíocht agus sé an aidhm ná é a bhréagnú (`Falsfication`).

Pléimis le dhá pharadacsa cháiliúla maidir le hionduchtú

- *Grue – Goodman*, agus
- *Fiach Dubh – Hempel.*

Grue Goodman

Má iniúchaimid a lán smaragaidí (emeralds) agus má bhíonn dath glas ag baint leo go léir, leanann sé de réir réasúnaíochta (ionduchtaithe) go bhfuil gach smaragaid, fiú na cinn nár iniúchadh, glas. Shamhlaigh Nelson Goodman (1906–1998) dhá thréith i leith smaragaide – glas agus grue, seo a leanas

***glas*:** an gnáth dath glas.

***grue*:** dath glas léi má dhéantar iniúchadh ar smaragaid roimh am t (sa todhchaí) agus dath gorm má dhéantar iniúchadh uirthi i ndiaidh ama t.

Fuair sé an focal 'grue' ó *gruebleen* a chum James Joyce i Finnegan's Wake [8, ltch 68]. De réir mar a ritheann an réasúnaíocht ionduchtach, má bhíonn tréith áirithe ann i leith gach smaragaide ar a ndearnadh iniúchadh go dtí seo, tá an tréith ann i leith gach smaragaide – fiú na cinn nár scrúdaíodh.

Cinnte tá dath glas ag baint le gach smaragaid go dtí seo agus de réir na réasúnaíochta beidh an dath sin ar gach ceann sa todhchaí. Ach, tá sé fíor freisin go bhfuil an tréith *grue* ag baint le gach smaragaid go dtí seo agus de réir na hargóinte céanna, beidh gach smaragaid sa todhchaí *grue*.

Ach, tá fadhb anseo. Roimh am t, tá glas agus grue mar an gcéanna, ach i ndiaidh ama t tá difríocht ann – ciallaíonn grue go bhfuil dath gorm ag baint léi. Mar sin, i ndiaidh ama t má thógaimid smaragaid úr ón talamh, agus má bhíonn sé glas, ní féidir léi bheith grue agus *vice versa*, má bhíonn sí gorm (.i. grue) níl sí glas.

Seo léiriú go bhfuil deacrachtaí le hionduchtú. Tá ionduchtú ríthábhachtach mar is de bharr réasúnaíochta ionduchtaithe a fhaighimid breis eolais.

Réiteach amháin ná béim níos mó a chur ar an tréith 'glas' a bheith ag smaragaid mar tá sé níos nádúrtha agus ag teacht níos fearr faoi mar a bhfuil cúrsaí sa dhomhan nádúrtha.

Fiach Dubh Hempel

Phléigh Karl Hempel (1905–1997) [10, Caibidil 4] leis an modh ionduchtach chomh maith. Chun a pharadacsa a chur in iúl rinne sé tagairt d'éan – an fiach dubh (raven). Chun bheith dílis don téarmaíocht, úsáidfimid an focal 'fiach' don éan úd agus úsáidfimid an focal 'dubh' le feidhm aidiachta. Tá sé seo ag teacht le foclóir an tSeabhaic (Irish-English Pronouncing Dictionary, An Seabhac, Talbot Press, 1959), áit ar thug seisean fiach ar 'raven'.

I ndiaidh breathnú ar a lán fiaigh tugtar faoi deara go bhfuil siad go léir dubh, agus de réir réasúnaíochta ionduchtaithe leanann an hipitéis

H: I leith gach fiach, tá sé dubh.

$$(x)(\mathrm{F}x \to \mathrm{D}x)$$

Má fhéachaimid ar fhiach agus má thugaimid faoi deara go bhfuil sé dubh, sin tacaíocht don hipitéis. Ach má bhíonn dath eile aige, diúltaítear an hipitéis. Níl aon fhadhb le sin.

Ach is féidir leagan eile den hipitéis a scríobh atá, de réir rialacha loighce, díreach mar an gcéanna

H*: I leith gach rud nach bhfuil dubh, ní fiach é.

$$(x)(\neg\,\mathrm{D}x \to \neg\,\mathrm{F}x).$$

Má iniúchaimid rud mar pheann gorm, is léir nach bhfuil sé dubh agus nach fiach é agus tugann sin tacaíocht do H*. Ach tá H* cothrom le H. An paradacsa ná go bhfuil sé ait go dtugann peann gorm fianaise dúinn go bhfuil dath dubh ar gach fiach.

Níl mórán deacrachta anseo don mhatamaiticeoir má bhíonn cainníocht i gceist. Abair go bhfuil 100 fiach ann agus 100 milliún rudaí eile ann nach bhfuil dubh. Tá dhá shlí ann chun an hipitéis a scrúdú. An tslí is éasca ná an 100 fiach a iniúchadh agus glacadh leis an hipitéis má bhíonn siad go léir dubh. An tslí eile ná an 100 milliún rudaí eile nach bhfuil dubh a iniúchadh agus glacadh leis an hipitéis dá mba nach fiach iad go léir.

Cinnte níl an dara mhodh éifeachtach ach réitíonn sé an paradacsa (maidir le cainníocht).

Ach dar le Quine níl aon bhrí bheith ag plé le rudaí 'neamh-dubh' mar seo mar níl aon nádúr ag baint leo.

5. Féintagairt

Tá trí pharadacsa sa roinn seo ag plé leis an gcoincheap de fhéintagairt:

- Paradacsa an Bhréagadóra,
- Paradacsa Russell, agus
- Paradacsa an Bhearbóra.

Paradacsa an Bhréagadóra

Bhí Naomh Pól dian ar áitreabhaigh oileáin Créit nuair a chuir sé ina leith (sa Bhíobla Naofa, Títeas 1:12-13) gur daoine místuama iad. I ngan fhios dó féin is dócha, bhí Naomh Pól ag tagairt do pharadacsa a bhí ag an nGréagach Epimenides timpeall 600 bliain roimhe sin:

- Is bréagadóirí iad go léir na Créitigh.
- Is Créiteach a dúirt é.

Is féidir leagan gearr den pharadacsa seo a chur amach mar

Ⓐ: 'Tá an abairt seo bréagach.'

Más fíor í leanann sé go bhfuil sí bréagach, agus más bréagach an abairt leanann sé go bhfuil sí fíor. Sé sin, bíonn Ⓐ fíor nuair nach bhfuil sí agus *vice versa.*

Paradacsa den scoth é seo. Níl an réiteach simplí. Tuigimid go bhfuil dhá ní ag teacht le chéile

- fírinne, agus
- féintagairt.

Phléigh Alfred Tarski (1901–1983) [11, ltch 109–123] le brí an fhírinne agus na bréagadóireachta (séimeantaic). Cé gur phléigh Tarski le teangacha foirmiúla, dar leis baineann fírinne leis an gcoincheap de mheta-teanga:

Thit sé. — ráiteas sa bhunteanga L.

Tá 6 litir i 'Thit sé' — sa mheta-teanga L'

Is fíor é "Tá 6 litir i 'Thit sé'" — sa mheta-mheta-teanga L''.

Níl aon fhadhb le fírinne nó féintagairt leo féin:

'Tá sé fliuch' — atá fíor nó bréagach;

'Tá an abairt seo as Gaeilge' – féintagairt.

Ach nuair a chuirtear le chéile iad, mar a rinneadh in Ⓐ thuas táimid i bponc. Dar le Tarski, sainmhínítear fírinne sa mhetatheanga – oibrítear ar chéim níos airde. Ní féidir fírinne a réiteach ina hiomláine sa bhunteanga. Bhí sé díomách an raibh aon réiteach ar fhírinne i dteanga nádúrtha.

Bhí tuairim eile ag Kripke [12, ltch 145–148]. Dar leis tá ráitis ann agus ní féidir a rá an bhfuil siad fíor nó nach bhfuil.

Is é seo an paradacsa ar úsáid Kurt Gödel ina pháipéar clúiteach nuair a chruthaigh sé go bhfuil ráitis sa mhatamaitic agus ní féidir a chruthú an bhfuil siad fíor nó nach bhfuil [nuair a chuirtear matamaitic ar bhunchloch aicsímiteach ar chomhchéim le huimhríocht].

Paradacsa Russell

Phléigh Tarski le paradacsa an bhréagadóra maidir le séimeantaic. Maidir le fírinne sa mhatamaitic, de ghnáth, is comhsheasmhacht le bunphrionsabail a bhíonn i gceist. Mar aon le paradacsa an bhréagadóra, is féintagairt i bhfoirm féinbhallraíocht an coincheap láidir i bparadacsa Bertrand Russell (1872-1970). Measadh, ag an am, go bhféadfaí tacar a shainmhíniú i dtéarma preideacáideacha, cosúil le

$$X = \{x\text{: leanann } x \text{ coinníoll ar bith}\},$$

agus uaidh sin bhí Gottlob Frege (1848–1925) ag iarraidh teacht ar na huimhreacha aiceanta trí rialacha loighce. Cheap sé go bhféadfaí bunchloch na matamaitice a leagadh ar loighic.

Ag baint úsáid as an míniú sin is féidir tacair a roinnt i ndhá grúpa:

- tacair gan féinbhallraíocht, agus
- tacair le féinbhallraíocht.

Mar shampla, tá an tacar seo gan féinbhallraíocht:

$$\begin{aligned} X_{\text{cúige}} &= \{x\text{: is Cúige } x\} \\ &= \{\text{Laighin, Mumha, Connachta, Ulaidh}\}, \end{aligned}$$

Is léir nach bhfuil an tacar $X_{\text{cúige}}$ ina bhall dá féin, mar ní cúige é $X_{\text{cúige}}$, ach tacar.

Ar an taobh eile tá an tacar seo ina bhall dá féin:

$$
\begin{aligned}
X_{>3} &= \{x\colon \text{ is tacar } x \text{ le níos mó ná 3 bhall } \} \\
&= \{X^{4}_{\text{cúige}}, X^{52}_{\text{cartaí}}, X^{?}_{\text{daoine}}, X^{32}_{\text{contae}}, \ldots\}. \\
&= \{X^{4}_{\text{cúige}}, X^{52}_{\text{cartaí}}, X^{?}_{\text{daoine}}, X^{32}_{\text{contae}}, X^{?}_{>3} \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Chuir Russell an cheist faoi

$$X = \{x\colon \text{ is tacar } x \text{ agus } x \notin x \ \}.$$

Tá X ina bhall de X nuair nach bhfuil sé ina bhall agus *vice versa* – paradacsa bunúsach.

I dtéarmaí Quine, is `antinomy` an paradacsa seo mar bhí ar na saineolaithe ag an am a dtuairimí a leasú. An réiteach atá i bhfeidhm ná cosc a chur ar fhéinbhallraíocht – cosúil leis an gcosc ar roinnt faoi náid.

Ba bhuile thubaisteach é an paradacsa sin do Gottlob Frege. Bhí sé ar tí a obair mhór a fhoilsiú nuair a fuair sé scéal ó Russell. Thuig sé láithreach go raibh fadhb dhoréitithe aige.

Paradacsa an Bhearbóra

Dar le Bertrand Russell, tá sráidbhaile sa Rúis inar féidir na fir fásta a roinnt i ndhá grúpa – daoine féinbhearrtha a bhearrann a bhféasóga féin agus daoine nach mbearrann a bhféasóga féin. An tasc atá ag an mbearbóir ná féasóga na bhfear nach mbearrann iad féin a bhearradh agus gan bacaint leis na daoine a bhearrann iad féin.

Ach tá fadhb ann. Is fear fásta an bearbóir é féin agus 'Cé a bhearrann an bearbóir?'. Má bhearrann an bearbóir a fhéasóg féin, is duine féinbhearrtha é agus ní cóir don bhearbóir é a bhearradh. Ar an lámh eile, mura mbearrann an bearbóir é féin, caithfidh an bearbóir é do bhearradh. Táimid i bponc.

Ach tá réiteach simplí ar an gcruachás seo. Ní fhéadfadh sráidbhaile mar sin bheith ann. Ní féidir coinníollacha an tsainmhíniú a tugadh faoin sráidbhaile a chomhlíonadh.

An ceacht sa mhatamaitic atá anseo ná nach leor rud éigin a shainmhíniú, caithfear eiseadh a chruthú chomh maith.

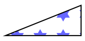
6. MIOSÚR

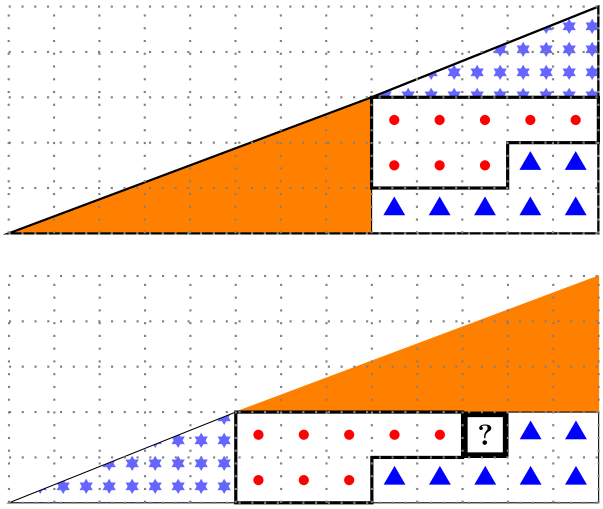
De réir teoiric miosúir má scoiltear corp A (cuimsithe i $\Re^n$) i míreanna scartha, agus iad a chur ar ais le chéile i gcorp eile B, beidh siad ar chomhmhiosúr, $\mu(A) = \mu(B)$. Pléimis le dhá pharadacsa faoin ábhar seo

- *Curry*, agus

- *Banach-Tarski.*

Paradacsa Curry
Scoiltear an triantán (ar barr) i bhFíor 9 i gceithre chuid agus cuirtear ar ais iad sa triantán (ar bun), ach tá cillín sa bhreis againn! Is paradacsa na súl an ceann seo mar ní triantáin iad ar chor ar bith ach ceathairshleasáin. Ag úsáid na gcomhordanáidí sa chúlra, is léir nach dtéann an líne (0,0)–(13,5) tríd an bpointe (8,3) nuair nach bhfuil na géaruillinneacha is lú sna triantáin cothrom

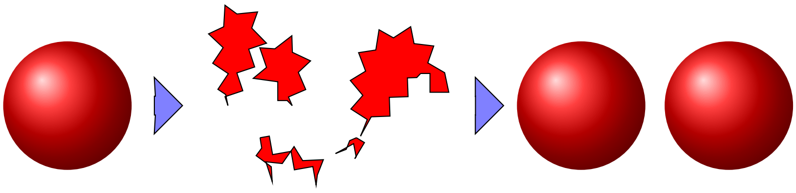
 $\tan^{-1}\frac{3}{8} = 20.556°$,  $\tan^{-1}\frac{2}{5} = 21.801°$.



FÍOR 9. Paradacsa Curry – cillín sa bhreis

Tá sé cliste sa chaoi is go mbailítear an difríocht atá idir achair an dá cheathairshleasán i gcillín amháin. Tabhair faoi deara gur uimhreacha leantacha iad na huimhreacha tabhachtacha (5,8,13) sa sraith Fibonacci.

Paradacsa Banach-Tarski
De réir leagan amháin de Banach-Tarski (1924) [13, ltch 366–367], is féidir an sféar aonad a scoilt i gcúig phíosa scartha agus iad a chur ar



Fíor 10. Paradacsa Banach-Tarski

ais le chéile sa chaoi is go bhfuil **dhá** sféar díreach mar an gcéanna leis an gcéad sféar – féach Fíor 10. Gan dabht tá deacracht anseo. Ach ní paradacsa atá ann – is teoirim é!

Tá a fhios againn cheana go dtarlaíonn rudaí gan coinne nuair a bhímid ag plé leis an éigríoch, m.sh $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$. Is mar seo atá anseo leis. Ní dlúthchoirp iad na píosaí seo – níl iontu ach cur le chéile casta de phointí a roghnaítear leis an Aicsím Rogha (Axiom of Choice). Níor thug Banach-Tarski aon slí chun an scoilt a dhéanamh. Thaispeáin siad gur féidir é a dhéanamh má roghnaítear ball amháin as gach ceann de (méid éigríche) na fo-thacair.

Is cáineadh an toradh seo ar an Aicsím Rogha, ach úsáidtear an aicsím seo chomh minic san go bhfuil leisce ar na matamaiticeoirí é a chur ar leataobh.

Colafan

D'úsáideadh an ríomhchlár clóchuradóireachta LaTeX chun an páipéar seo a chur amach. Mar chuid de sin, d'úsáideadh `TikZ` chun na léaráidí a tharraingt agus `cooltips` chun an t-aistriúchán go Béarla i leith na bhfocal sa Ghluais a nochtadh sa leagan leictreonach, nuair a théann an pointeoir luiche tharstu. (Oibríonn sé seo le AdobeReader – agus bhféidir le léitheoirí PDF eile). Tá an Ghluais bunaithe ar `http://www.focal.ie`. D'úsáideadh An Gramadóir ag `http://borel.slu.edu/gramadoir` chun feabhas a chur ar chruinneas na Gaeilge. Tá na táirgí seo go léir saor ar an idirlíon.

Gluais

aicme choibhéiseach *equivalence class* · **airmheánach** *median* · **aon le haon** *one to one* · **bréagadóireacht** *falsehood* · **bunuimhir**

cardinal number · **cainníocht** *quantity* · **ceathairshleasán** *quadrilateral* · **cóimheas** *ratio* · **coinbhéirseach** *convergent* · **comharba** *successor* · **comhsheasmhacht** *consistency* · **comhshleasach** *equilateral* · **corda** *chord* · **críochta** *finite* · **cuimsithe** *bounded* · **cur le chéile** *assemblage* · **dea-ordaithe** *well-ordered* · **déaduchtú** *deduction* · **détheilgean** *bijection* · **dibhéirseach** *divergent* · **dóchúlacht** *probability* · **éigríoch** *infinity* · **eiseadh** *existence* · **feidhm** *function* · **féinbhallraíocht** *self-membership* · **féintagairt** *self-reference* · **fírinne** *truth* · **fo-thacar** *subset* · **frithrá** *contradiction* · **gan aird** *random* · **hipitéis** *hypothesis* · **iomas** *intuition* · **ionduchtú** *induction* · **íosbhall** *least element* · **minicíocht choibhneasta** *relative frequency* · **miosúr** *measure* · **neamhnitheach** *null (set)* · **orduimhir** *ordinal* · **preideacáid** *predicate* · **Prionsabal Neafaise** *Principle of Indifference* · **réaduimhir** *real number* · **saonta** *naive* · **scartha** *disjoint* · **séimeantaic** *semantic* · **sraith** *series* · **stua** *arc* · **suibiachtúil** *subjective* · **tacar cumhachtach** *power set* · **tacar** *set* · **teorainn** *limit* · **trasnán** *diagonal* · **tuairimíocht** *conjecture* · **uileghabhálach** *exhaustive* · **uilethacar** *universal set* · **uimhir aiceanta** *natural number*

TAGAIRTÍ

[1] Quine, W.V.: Paradox. *Scientific American.* **206**, April 1962.
[2] Northrop, Eugene P.: *Riddles in Mathematics*, Pelican Books, 1944
[3] Gardner, Martin: *Further Mathematical Diversions – The Paradox of the Unexpected Hanging and Others.* George Allen & Unwin Ltd. . 1970.
[4] Zellini, Paulo: *A Brief History of Infinity.* Penguin Books. 2005.
[5] Kemp, Gary: *Quine – A Guide for the Perplexed.* Continuum International Publishing Group. 2006.
[6] Rucker, Rudy: *Infinity and the Mind.* Penguin Books. 1997.
[7] Cori, René and Lascar, Daniel: *Mathematical Logic, Part II.* Oxford University Press. 2001.
[8] Clarke, Michael: *Paradoxes from A to Z.* Routledge. 2002.
[9] Popper, Karl: Falsification, in *Scientific Enquiry* ed. Robert Klee. Oxford University Press. 1999.
[10] Fetzer, James H.: *Science, Explanation, and Rationality – The Philosophy of Carl G. Hempel.* Oxford University Press. 2000.
[11] Feferman, Anita Burdman and Federman, Solomon: *Alfred Tarski, Life and Logic.* Cambridge University Press. 2000.
[12] Haack, Susan: *Philosopy of Logics.* Cambridge University Press. 1978.
[13] Penrose, Roger: *The Road to Reality.* Jonathan Cape. London. 2004.

Gearóid Ó Catháin: Tá céimeanna aige sa Mhata agus sa Staitistic (1973, 1974) as Ollscoil Corcaigh agus Ph.D. (2002) as Ollscoil Luimnigh.

Doibrigh sé sa Phríomh Oifig Staidrimh agus sa Roinn Sláinte. Tá sé fostaithe mar staitisteoir ag Córas Iompair Éireann i Stáisin Heuston i mBaile tha Cliath ó 1982. Is maith leis bheith ag rothaíocht, ag cadhcáil (kayaking) agus ag rith. Is leantóir dóchasach é dfhoireann iomána na nDéise.

Gearóid Ó Catháin,
Rannóg Airgeadais,
Córas Iompair Éireann,
Stáisiún Heuston,
Baile Átha Cliath 8,
gerrykeane007@gmail.com

Received 27-5-2011, and in final form 13-7-2011